Ueber

# die Kegel des Pappus und des Hachette.

Inaugural-Dissertation

der mathematischen und naturwissenschaftlichen Facultät

der

Kaiser-Wilhelms-Universität

**Strassburg**

zur Erlangung der Doctorwürde vorgelegt

von

Theodor Meyer

aus

**Unnau.**

**Berlin 1884.**

Druck und Verlag von W. & S. Loewenthal.

C., Grün-Strasse 4.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552715_0079

Meinem lieben Vater.

Von den speziellen Kegelflächen II. O. haben bis jetzt, abgesehen vom Rotationskegel, nur zwei eine eingehende Untersuchung erfahren: der orthogonale und der gleichseitige Kegel. Der erstere, welcher seinen Namen von Schröter erhalten hat, wird von der Kante eines rechten Flächenwinkels beschrieben, wenn sich dessen Seiten um zwei sich schneidende Geraden drehen. Hachette[1]) scheint der erste gewesen zu sein, welcher auf diesen Kegel aufmerksam machte und zugleich von ihm die characteristische Eigenschaft nachwies, dass seine Kreisebenen normal stehen zu zwei Kegelstrahlen. Weitere Bearbeitungen hat dieser Kegel dann noch bei Chasles[2]), Steiner[3]), Schönflies[4]), Ruth[5]) gefunden; er ist schliesslich von Schröter[6]) am vollständigsten untersucht worden.

Auch den gleichseitigen Kegel, d. h. denjenigen, welchem unendlich viele rechtwinkelige Dreikante eingeschrieben werden können, hat Schröter[7]) neben Vogt[8]) in erschöpfen-

---

[1]) Correspondance sur l'Ecole imp. Polytechn. Paris, tom. I, pag. 179.

[2]) Chasles, Mém. de géom. pure sur les propr. génér. des cônes du second degré. Bruxelles 1830, pag. 40 und Mém. sur les surfaces engendrées par une ligne droite, p. 57.

[3]) Steiner, Syst. Entw. Berlin 1832. Nr. 53. II. 3.

[4]) Schönflies, Synth. geom. Unters. Berlin 1877. pag. 14.

[5]) Sitzb. d. Akad. d. Wiss. Wien 1879, B. 53, pag. 257.

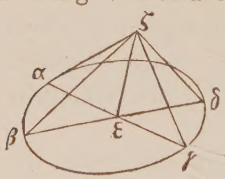
[6]) Schröter, Theorie der Oberfläche II. O. u. d. Raumcurven III. O. Leipzig 1880, pag. 67.

[7]) Schröter, Theorie d. Oberfl. II. O. u. d. Raumcurven III. O. Leipzig 1880, pag. 75.

[8]) Crelle's Journ. 86. pag. 297.

der Weise behandelt, nachdem vorher Steiner [1]), Joachimsthal [2]) und Hesse [3]) auf ihn aufmerksam gemacht hatten. Der Name „gleichseitiger Kegel" rührt her von Vogt und bezieht sich auf eine Eigenschaft des Kegels, welche ihm in der Geometrie des Strahlenbündels eine analoge Stellung anweist, wie der gleichseitigen Hyperbel in der ebenen Geometrie.

Gegenüber dem grossen Interesse, das man diesen beiden Kegeln, besonders seit Steiner, zugewandt hat, erscheint es auffallend, dass eine andere spezielle Kegelfläche II. O., deren characteristische Eigenschaft schon Pappus in seinen Collectiones hervorhebt, von den Neueren bisher ganz unbeachtet gelassen wurde. Dieselbe zeichnet sich dadurch aus, dass sie von allen durch eine gewisse Gerade gelegten Ebenen in je zwei normalen Strahlen geschnitten wird. Diese Eigenschaft ist bei der allgemeinen Kegelfläche II. O. nicht vorhanden; sie bedingt also einen besonderen Character des Kegels, und es lässt sich von vorne herein vermuthen, dass dabei die Orthogonalität eine grosse Rolle spielt. Die betreffende Stelle bei Pappus, auf welche Herr Prof. Reye mich aufmerksam machte, lautet in der lateinischen Uebersetzung von Hultsch [4]):




„At recta $\zeta\varepsilon$ [5]) circuli plano non perpendicularis sit, eademque circuli semidiametro aequalis; dico oculo in puncto $\zeta$ posito, sic etiam diametros aequales apparere.

Ducantur enim duae diametri $\alpha\gamma, \beta\delta$ et jungantur $\zeta\alpha, \zeta\beta\ \zeta\gamma, \zeta\delta$. Quoniam tres $\alpha\varepsilon, \varepsilon\gamma, \varepsilon\zeta$ aequales sunt, rectus igitur est angulus $\alpha\zeta\gamma$. Eadem ratione etiam

---

[1]) Steiner, Syst. Entw. Berlin 1832, Anhang No. 59.
[2]) Crelle's Journ. 56. pag. 284.
[3]) Hesse, Analyt. Geom. d. Raumes, Leipzig 1876, III Aufl. pag. 205.
[4]) Pappi Collectiones ed. Hultsch, Vol. II. p. 581.
[5]) $\varepsilon$ bedeutet den Mittelpunkt des Kreises.

angulus $\beta\zeta\delta$ rectus est; diametri igitur $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ aequales apparebunt. Similiter demonstratimus etiam omnes reliquas.“

Denken wir uns also sämmtliche Punkte des Kreises aus $\zeta$ durch Strahlen projicirt, so erhalten wir eine Kegelfläche II. O., welche von allen durch die Gerade $\zeta\varepsilon$ gelegten Ebenen in normalen Strahlen geschnitten wird. Diese ausgezeichnete Kegelfläche II. O. wollen wir mit den Hülfsmitteln der neueren Geometrie, welche Pappus noch nicht zu Gebote standen, im Folgenden näher untersuchen. An bemerkenswerthen Eigenschaften dieses „Kegels des Pappus“ wird sich unter anderem ergeben, dass er auch von allen durch $\zeta$ normal zur Kreisebene gelegten Ebenen in rechtwinkeligen Strahlen geschnitten wird. Daher können die vorhergehenden Ausführungen von Pappus insofern noch ergänzt werden, als aus $\zeta$ auch diejenigen Sehnen des Kreises gleich gross erscheinen, welche durch die orthogonale Projection $\varepsilon'$ von $\zeta$ gehen. Dies lässt sich übrigens auch direct aus der Darstellung von Pappus folgern. Da nämlich der Punkt $\zeta$ mit dem Kreise $\alpha\beta\gamma$ auf einer Kugel liegt, deren Centrum $\varepsilon$ ist, so sind die durch $\varepsilon'$ in der Ebene dieses Kreises gezogenen Sehnen zugleich Durchmesser der in den Normalebenen liegenden Kreise der Kugel; folglich werden diese Sehnen aus $\zeta$ durch rechte Winkel projicirt, erscheinen also gleich gross aus diesem Punkte.

Die Eigenschaften des Kegels des Pappus gruppiren sich wesentlich um die cyclischen Ebenen und deren Polstrahlen; aber auch die Focalaxen sind beachtenswerth, indem sie uns auf einen interessanten Zusammenhang führen, welcher zwischen dem Kegel des Pappus und dem orthogonalen besteht.

Der dem Kegel des Pappus supplementäre (reziproke) Kegel besitzt die Eigenschaft, dass ihm unendlich viele rechte Flächenwinkel umschrieben werden können, deren Kanten in einer Ebene liegen. Er ist ferner dadurch ausgezeichnet, dass er der geometrische Ort aller Punkte ist, welche von

einer festen Ebene und einer festen Geraden gleichen Abstand haben. Dieser Ort ist bereits von Hachette [1]) als Kegelfläche II. O. erkannt und zur Lösung eines geometrischen Problems benutzt worden. Von Chasles [2]) haben wir den Nachweis, dass die feste Gerade Focalaxe und die feste Ebene deren Polarebene in Bezug auf den Kegel ist. Auf weitere Untersuchungen geht jedoch Chasles nicht ein; ebenso wenig Schönflies [3]) in einer neueren Arbeit, wo nur constatirt wird, dass die feste Ebene Polarebene der festen Geraden ist. Der Kürze wegen bezeichnen wir diese Kegelfläche II. O. als „Kegel des Hachette".

Bei einer Gelegenheit kommen wir auch allgemein auf die Kegelfläche II. O. zu sprechen, indem wir zeigen, dass durch die Pol- und Normalstrahlen der cyclischen Ebenen sich entweder keine oder unendlich viele reelle Ebenen legen lassen, die die Kegelfläche II. O. in normalen Strahlen schneiden.

---

[1]) Correspondance math. et phys. par Quetelet Bruxelles, tom IV, pag. 285.

[2]) Chasles, Mém. de géom. pure sur les propr. génér. des cônes du sec. degré. Bruxelles 1830, pag. 44.

[3]) Schönflies, Synth. geom. Unters. Berlin 1877, pag. 33.

# Der Kegel des Pappus.

## I. Entstehungsweise des Kegels, seine cyclischen Ebenen und ihre Polstrahlen.

Einen Kegel des Pappus können wir uns, wie bereits einleitend angedeutet, einfach dadurch erzeugen, dass wir einen grössten Kreis $\gamma$ einer Kugel aus einem Punkte $O$ ihrer Oberfläche projiciren; denn diese Kegelfläche wird von jeder durch $O$ gehenden Durchmesserebene der Kugel in zwei normalen Strahlen geschnitten.

Aus dieser Entstehungsweise des Kegels wollen wir direct eine andere, von der Kugel unabhängige ableiten, welche uns für die Darlegung seiner Eigenschaften besonders geeignet erscheint.

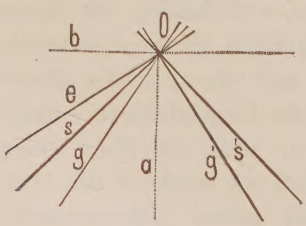
Denken wir uns nämlich durch $O$, den Mittelpunkt des Kegels, eine Ebene $\varepsilon$ parallel zu $\gamma$ gelegt, so ist dieselbe eine cyclische Ebene des Kegels und sie hat die Gerade $g$, welche $O$ mit dem Mittelpunkt des Kreises $\gamma$ verbindet, zu ihrem Polstrahl. Eine beliebige durch $g$ gelegte Ebene $\tau$ schneide den Kegel in den Strahlen $s$ und $t$ und die cyclische Ebene $\varepsilon$ in dem Strahle $e$. Alsdann sind die Kegelstrahlen $s$ und $t$ harmonisch getrennt durch $e$ und $g$; weil sie aber einen rechten Winkel einschliessen, so sind sie zugleich die Halbirungslinien des Winkels $(e\,g)$ und seines Nebenwinkels. Jeder Kegelstrahl bildet daher mit $g$ denselben Winkel, wie mit demjenigen Strahle in $\varepsilon$, welcher mit ihm und $g$ in einer Ebene liegt.

Hieraus ergiebt sich nun folgende Erzeugungsart für einen Kegel des Pappus:

> Dreht sich der eine Schenkel eines veränderlichen Winkels um seinen Scheitelpunkt $O$ in einer Ebene $\varepsilon$, während der andere Schenkel $g$ fest bleibt, so beschreibt seine Halbirungslinie einen Kegel des Pappus, bezüglich dessen $\varepsilon$ eine cyclische Ebene und $g$ der Polstrahl von $\varepsilon$ ist.

Diese Entstehungsweise des Kegels, aus welcher sich auch umgekehrt die erstere leicht ableiten lässt, wollen wir unseren weiteren Betrachtungen vorläufig zu Grunde legen. Es geht aus ihr unmittelbar hervor, dass ein Kegel des Pappus durch eine cyclische Ebene und ihren Polstrahl eindeutig bestimmt ist.

Errichten wir nun auf der Ebene $\varepsilon$ im Punkte $O$ die Normale $g'$ und verbinden $g'$ mit $g$ durch eine Ebene, so ist dieselbe, weil in ihr der Pol- und Normalstrahl einer cyclischen Ebene liegt, eine der drei Symmetrieebenen des Kegels. Von den beiden Hauptaxen, welche sie enthält, wollen wir die elliptische mit $a$ und die hyperbolische mit $b$ bezeichnen. Der Normalstrahl $c$ der Symmetrieebene ist die zweite hyperbolische Hauptaxe, in welcher sich die beiden cyclischen Ebenen schneiden. Bezeichnen wir alsdann mit $e$ den Schnittstrahl der Symmetrieebene $\overline{ab}$ mit der cyclischen Ebene $\varepsilon$ und nennen $s$ und $s'$ die Halbirungslinie des Winkels $(e\,g)$ und seines Nebenwinkels, so sind diese die Kegelstrahlen in der Symmetrieebene $\overline{ab}$. Weil nun aber $g'$ normal zu $e$ ist, so ist der Winkel $(g'\,s') = (e\,s)$, also auch $(g'\,s') = (s\,g)$. Hieraus folgt, dass der Normalstrahl $g'$ der cyclischen Ebene $\varepsilon$ symmetrisch liegt mit $g$, dem Polstrahle von $\varepsilon$, bezüglich der Hauptaxen $a$ und $b$; also ist $g'$ zugleich Polstrahl der zweiten cyclischen Ebene $\varepsilon'$, und diese steht senkrecht zu $g$.




Wir sehen also, dass beim Kegel des Pappus die cy-

clischen Ebenen in folgendem bemerkenswerthen Zusammenhange stehen:

Von den beiden cyclischen Ebenen steht jede normal auf dem Polstrahl der anderen.

Diesen Satz können wir als speziellen Fall des folgenden allgemeineren auffassen, von dessen Beweis wir mit Rücksicht auf die vorhergehenden Betrachtungen absehen dürfen:

Ist $\xi$ eine beliebige durch die Hauptaxe $c$ eines Kegels des Pappus gelegte Ebene und $x$ ihr Polstrahl, so hat die Normalebene von $x$ zu ihrem Polstrahl den Normalstrahl von $\xi$.

Stehen umgekehrt zwei durch den Mittelpunkt eines Kegels des Pappus gelegte Ebenen zu einander in dem Verhältniss, dass der Normalstrahl einer jeden von ihnen zugleich Polstrahl der anderen ist, so ist ihr Schnittstrahl conjugirt mit zwei zu ihm normalen Strahlen, also identisch mit einer Hauptaxe. Diese kann nur die Hauptaxe $c$ sein, wie weiter unten gezeigt werden soll.

---

Wir hatten uns einen Kegel des Pappus construirt mit Hülfe der Ebene $\varepsilon$ und der Geraden $g$ und dabei gesehen, dass eine beliebig durch $g$ gelegte Ebene $\tau$ den Kegel in zwei normalen Strahlen schneidet. Hätten wir die Ebene $\varepsilon'$ und die Gerade $g'$ als erzeugende Elemente genommen, so würden wir einen Kegel des Pappus erhalten haben, welcher von allen durch $g'$ gelegten Ebenen in normalen Strahlen geschnitten wird. Dieser letztere Kegel ist aber mit ersterem identisch, denn er hat mit ihm die cyclischen Ebenen $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ und ihre Polstrahlen $g$ und $g'$ gemein. Daher können wir sagen:

Alle Ebenen, die wir durch die Polstrahlen der cyclischen Ebenen eines Kegels des Pappus legen können, schneiden denselben in normalen Strahlen.

Zugleich auch haben wir folgendes Resultat:

Durch eine Ebene $\varepsilon$ und eine Gerade $g$ wird der-

selbe Kegel des Pappus bestimmt, wie durch die Normalebene $\varepsilon'$ von $g$ und den Normalstrahl $g'$ von $\varepsilon$.

Die Geraden $g$ und $g'$ fallen als Polstrahlen der cyclischen Ebenen innerhalb des Kegels; folglich ist derjenige Flächenwinkel der cyclischen Ebenen, innerhalb dessen die Kegelfläche liegt, ein stumpfer. Für den Fall, dass derselbe in einen rechten übergeht, fällt $g$ in $\varepsilon$ und $g'$ in $\varepsilon'$ und folglich degenerirt alsdann der Kegel des Pappus in zwei Strahlenbüschel I. O, deren Ebenen zu einander normal sind. — Wird andererseits der Flächenwinkel der cyclischen Ebenen gleich zwei Rechten, so fällt wegen der Vereinigung von $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ auch $g$ mit $g'$ zusammen und steht senkrecht zu der Ebene $\varepsilon$. In diesem Falle erhalten wir einen Rotationskegel[1]), welcher von allen durch die Axe gelegten Ebenen in normalen Strahlen geschnitten wird. Dieser Kegel fällt mit seinem supplementären zusammen. Ist daher $\xi$ eine beliebige, den Mittelpunkt des Rotationskegels enthaltene Ebene und $x$ ihr Polstrahl, so hat die Normalebene von $x$ zu ihrem Polstrahl den Normalstrahl von $\xi$ (cf. pag. 11 u. pag. 13).

Nachdem wir nun gezeigt haben, dass die Pol- (Normal-) strahlen $g$ und $g'$ der cyclischen Ebenen $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ die Eigenschaft besitzen, dass alle durch sie gehenden Ebenen den Kegel in rechten Winkeln schneiden, fragt es sich, ob diese Strahlen die einzigen dieser Art sind. Um dies zu untersuchen, wollen wir mit $x$ irgend einen von $g$ und $g'$ verschiedenen und zunächst nicht in der Ebene $\overline{gg'}$ gelegenen Strahl[2]) bezeichnen. Alsdann können wir durch ihn zwei Ebenen legen, welche den Kegel in normalen Strahlen schneiden, nämlich diejenigen, welche $x$ mit $g$ und $g'$ verbinden. Wir wollen diese Ebenen mit $\tau$ und $\tau'$ und die in ihnen gelegenen Kegelstrahlen mit $s\,t$ und $s'\,t'$ bezeichnen. Nehmen wir dann an, wir könnten durch $x$ noch eine dritte Ebene $\tau''$

[1]) Unter Kegel des Pappus kurzweg wollen wir den schiefen Kegel des Pappus verstehen.

[2]) „Strahl" bedeutet hier und weiterhin eine Gerade, die durch den Mittelpunkt des Kegels geht.

legen, welche den Kegel in den normalen Strahlen $s''$ $t''$ schneidet, so wird der durch $x$ und die Polarebene $\xi$ von $x$ bestimmte Kegel des Pappus mit den gegebenen sechs Kegelstrahlen, nämlich $s\,t$, $s'\,t'$, $s''\,t''$ gemein haben, also mit ihm identisch sein. Dadurch aber haben wir für den gegebenen Kegel noch eine dritte und vierte reelle cyclische Ebene gefunden, nämlich $\xi$ und die Normalebene von $x$. Dies ist eine Unmöglichkeit, welche uns zwingt, die Annahme fallen zu lassen, dass durch $x$ noch andere als die Ebene $\overline{xg}$ und $\overline{xg'}$ gelegt werden können, die rechte Winkel aus dem Kegel schneiden.

Liegt der Strahl $x$, um auch diesen Fall zu erledigen, in der Ebene $\overline{gg'}$ und nehmen wir an, ausser dieser Ebene ginge durch $x$ noch eine andere, welche den Kegel in normalen Strahlen schneidet, so werden wir durch ähnliche Betrachtungen wie vorhin auf einen Kegel des Pappus geführt, welcher mit dem gegebenen 4 Kegelstrahlen und 2 Berührungsebenen gemein hat, aber nicht dieselben cyclischen Ebenen besitzt. Dieser Kegel ist daher unmöglich, und wir müssen folgern, dass in diesem Falle durch $x$ nur die Ebene $\overline{gg'}$ geht, welche in normalen Strahlen schneidet.

Das so gewonnene Resultat wollen wir in folgender Form aussprechen:

> Alle Ebenen, welche aus einem Kegel des Pappus normale Strahlen schneiden, bilden zwei Ebenenbüschel I. O., deren Axen die Polstrahlen (Normalstrahlen) der cyclischen Ebenen sind.

Ehe wir hieran weitere Folgerungen knüpfen, wollen wir erst den Beweis für die oben (S. 11) ausgesprochene Behauptung nachtragen, dass nur durch die Hauptaxe $c$ eines Kegels des Pappus Ebenenpaare von der ausgezeichneten Lage gehen können, dass der Normalstrahl einer jeden Ebene des Paares zugleich Polstrahl der andern ist. Nennen wir nämlich zwei solche Ebenen $\xi$ und $\xi'$ und ihre Polstrahlen in Bezug auf den gegebenen Kegel des Pappus $x$ und $x'$, dann ist durch $\xi$ und $x$ derselbe zweite Kegel des Pappus bestimmt,

wie durch $\xi'$ und $x'$ (S. 11). Folglich hat dieser Kegel mit dem gegebenen die in den Ebenen $\overline{x\,g}$, $\overline{x\,g'}$, $\overline{x'\,g}$, $\overline{x'\,g'}$ gelegenen 8 Kegelstrahlen gemein. Dies ist nicht möglich, wofern nicht $x$ und $x'$ in der Ebene $\overline{g\,g'}$ selber liegen. In letzterem Falle aber reduciren sich die gemeinsamen Elemente beider Kegel auf 2 Strahlen und ihre Berührungsebenen und die beiden Ebenen $\xi$ und $\xi'$ schneiden sich in der Hauptaxe $c$, welche der Pol- und Normalstrahl der Symmetrieebene $\overline{g\,g'}$ ist.

---

Wir stellen uns nun die Aufgabe, als Ergänzung zu dem letzten Satze (S. 13) den folgenden allgemein gültigen zu beweisen:

> Durch die Pol- und Normalstrahlen der cyclischen Ebenen einer Kegelfläche II. O. lassen sich entweder keine oder unendlich viele reelle Ebenen legen, welche die Kegelfläche in normalen Strahlen schneiden.

Um dies zunächst für die Polstrahlen der cyclischen Ebenen zu zeigen, erinnern wir an die bekannte Thatsache, dass eine Kegelfläche II. O. durch eine cyclische Ebene $\varepsilon$ und ihren Polstrahl $g$ eindeutig bestimmt ist, sobald von ihr noch ein Kegelstrahl $s$ gegeben ist. Diese Kegelfläche ist eine solche des Pappus, wenn $s$ einen der Winkel halbirt, welche $g$ mit den Strahlen in $\varepsilon$ bildet, also auch dann, wenn sie von irgend einer durch $g$ gehenden Ebene in zwei normalen Strahlen geschnitten wird. Für jede andere, von einem Kegel des Pappus verschiedene Kegelfläche II. O. existiren also keine reellen Ebenen, welche durch den Polstrahl einer cyclischen Ebene gelegt, aus der Kegelfläche rechte Winkel schneiden.

Nehmen wir andererseits an, eine Kegelfläche II. O. werde von einer Ebene $\tau$, die durch den Normalstrahl $g'$ einer cyclischen Ebene $\varepsilon$ geht, in zwei normalen Strahlen $s$ und $t$ geschnitten, so ist die in $\varepsilon$ gelegene Normale $n$ von $\tau$ conjugirt zu dem Schnittstrahl der Ebene $\tau$ mit der cyclischen Ebene $\varepsilon$. Schneidet nun die Ebene $\overline{n\,s}$ die Kegelfläche zum

andern Male in $t'$, so geht die $t'$ mit $t$ verbindende Ebene durch den Polstrahl $g$ der cyclischen Ebene $\varepsilon$. Weil ferner $t$ Normale der Ebene $\overline{n\,s} = \overline{s\,t'}$ ist, so schliessen $t$ und $t'$ einen rechten Winkel ein, woraus wir erkennen, dass die angenommene Kegelfläche II. O. indentisch ist mit einem Kegel des Pappus. Jede andere Kegelfläche II. O. kann also von keiner reellen Ebene in normalen Strahlen geschnitten werden, die durch den Normalstrahl einer cyclischen Ebene geht. Hiermit haben wir den obigen Satz bewiesen und zugleich kennen gelernt, wie man am einfachsten entscheidet, ob eine Kegelfläche II. O. mit einem Kegel des Pappus identisch ist oder nicht.

Es lässt sich noch eine Folgerung aus dem letzten Satze ziehen. Wenn man bei einer gegebenen Kegelfläche II. O. um einen Strahl $g$ eine Ebene dreht, so ändert der Winkel, welchen die in ihr gelegenen Kegelstrahlen einschliessen, sich entweder gar nicht, oder stetig. Beim Uebergang von einem spitzen zu einem stumpfen Winkel muss er folglich durch $90^0$ hindurchgehen. Ist nun $g$ normal zu einer cyclischen Ebene, oder Polstrahl derselben, so ist jener Winkel entweder für keine oder für jede der Ebenen ein rechter; in ersterem Falle ist er folglich für keine oder für jede der Ebenen ein stumpfer Winkel. Also werden aus einer Kegelfläche II. O., die von einer solchen des Pappus verschieden ist, entweder nur spitze oder nur stumpfe Winkel ausgeschnitten von allen denjenigen Ebenen, die durch die Pol- und Normalstrahlen der cyclischen Ebenen gehen.

Nach früheren Erörterungen ist leicht einzusehen, dass durch einen beliebigen Strahl $x$ höchsteus zwei (reelle oder imaginäre) Ebenen gehen, welche eine allgemeine Kegelfläche II. O. in normalen Strahlen schneiden. Denn sobald sich in dem Strahle $x$ drei solche Ebenen schneiden, fällt die Kegelfläche zusammen mit dem durch $x$ und seine Polarebene bestimmten Kegel des Pappus.

Auf diese Bemerkung lässt sich die Annahme gründen, dass die Ebenen, welche eine Kegelfläche II. O. in normalen

Strahlen schneiden, einen Ebenenbüschel II. O. bilden, also eine Kegelfläche II. O. umhüllen. Beim gleichseitigen Kegel[1]) finden wir diese Annahme sofort bestätigt; denn jede Ebene, welche ihn in normalen Strahlen schneidet, steht senkrecht zu einem Kegelstrahl, berührt also den supplementären Kegel.

---

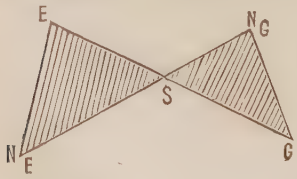
Wir wenden uns nun wieder zur alleinigen Behandlung des Kegels des Pappus und stellen zunächst folgenden Satz auf:

> Jede zu einer cyclischen Ebene eines Kegels des Pappus normale Ebene $\xi$, welche nicht durch den Mittelpunkt des Kegels geht, schneidet denselben in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt auf der andern cyclischen Ebene liegt.

Nämlich die durch den Mittelpunkt des Kegels parallel zu $\xi$ gelegte Ebene $\xi'$ enthält den Normalstrahl $g'$ von $\varepsilon$, schneidet also den Kegel in zwei normalen Strahlen. Diese sind parellel zu den Asymptoten der in $\xi$ gelegenen Hyperbel; folglich ist diese eine gleichseitige. Der Polstrahl $x'$ der Ebene $\xi'$ liegt in der cyclischen Ebene $\varepsilon'$ und wird von $\xi$ in einem Punkt geschnitten, welcher der Pol der unendlich entfernten Geraden in Bezug auf die gleichseitige Hyperbel, also deren Mittelpunkt ist.

Nach früheren Darlegungen ist es klar, dass keine andere Kegelfläche II. O. ausser der des Pappus in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden kann von solchen Ebenen, die normal sind zu den cyclischen.

Durch eine interessante Eigenschaft sind die Berührungsebenen an einen Kegel des Pappus ausgezeichnet. Um diese darzulegen, wollen wir einen beliebigen Kegelstrahl $s$




mit $g$ durch eine Ebene $\tau$ verbinden und mit $e$ den Schnittstrahl von $\tau$ und $\varepsilon$ bezeichnen. Dann wird die Berührungsebene $\sigma$ an $s$ die cyclischen Ebenen $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ in zwei Strahlen

---

[1]) cf. pag. 5.

${}^n e$ und ${}^n g$ schneiden, welche bezw. normal sind zu $e$ und $g$. Die Ebene $\gamma$, welche die Strahlen $g$ und ${}^n g$ enthält, bildet mit den Ebenen $\sigma$ und $\tau$ ein Dreiseit, zu welchem ein anderes, aus den Ebenen $\varepsilon$, $\sigma$, $\tau$ bestehendes congruent ist; [1]) denn ausser dem gemeinschaftlichen Flächenwinkel $(\sigma\tau)$ als Scheitelwinkel stimmen beide Dreiseite noch überein in zwei Kantenwinkeln $(s\,g) = (s\,e)$ u. $(g\,{}^n g) = (e\,{}^n e) = R$.

Die Berührungsebene $\sigma$ bildet daher mit $\varepsilon$ denselben Winkel, wie mit $\gamma$, also auch wie mit $g$, denn $g$ steht senkrecht zu der Schnittlinie $\overline{\sigma\gamma} = {}^n g$. Weil nun $\sigma$ Berührungsebene an einen beliebigen Kegelstrahl ist, so dürfen wir sagen:

> Jede Berührungsebene eines Kegels des Pappus bildet gleiche Winkel mit einer seiner cyclischen Ebenen und ihrem Polstrahle.

Umgekehrt gilt folgender Satz:

> Bewegt sich um den Schnittpunkt einer festen Ebene $\varepsilon$ und einer festen Geraden $g$ eine Ebene so, dass sie mit $\varepsilon$ denselben Winkel bildet, wie mit $g$, so umhüllt sie den durch $\varepsilon$ und $g$ bestimmten Kegel des Pappus.

Es ist klar, dass die Ebene auch dann noch einen Kegel des Pappus umhüllt, wenn der Punkt, um welchen sie sich dreht, nicht zusammenfällt mit dem Schnittpunkt der Ebene $\varepsilon$ und der Geraden $g$.

Wenn wir schliesslich berücksichtigen, dass beim Kegel des Pappus der Polstrahl der einen cyclischen Ebene zugleich Normalstrahl der anderen ist, so können wir in Umformung des vorletzten Satzes auch sagen:

> Beim Kegel des Pappus beträgt die constante

---

[1]) Zur Erleichterung der räumlichen Anschauung mag nebenstehende Figur dienen, welche einen Schnitt der Dreikante mit einer Ebene darstellt. Unter den grossen lateinischen Buchstaben sind die Schnittpunkte dieser Ebene mit den Strahlen zu verstehen, welche durch die entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet sind.

Summe der Winkel, welche eine beliebige Berührungsebene mit den beiden cyclischen Ebenen bildet, einen Rechten.

## II. Focalaxen, metrische Relationen, Verhältniss des Kegels zum orthogonalen und supplementären.

Sei $\tau$ irgend eine durch $g$ gelegte Ebene und $e$ ihr Schnittstrahl mit der cyclischen Ebene $\varepsilon$. Ziehen wir dann in $\varepsilon$ die Normale $n$ zu $e$, so ist dieselbe conjugirt, sowohl zu $e$, als auch zu $g$, folglich der Polstrahl der Ebene $\tau$. Die Ebene $\tau'$, welche $n$ mit $g'$ verbindet, ist daher conjugirt zu $\tau$; dieselbe steht aber auch senkrecht zu $\tau$, da $e$ ihr Normalstrahl ist. Wir können also sagen:

> Sind zwei durch $g$ und $g'$ gehende Ebenen conjugirt bezüglich des Kegels des Pappus, so stehen sie zu einander normal; ihre Schnittlinie beschreibt also einen orthogonalen Kegel, wenn sich beide Ebenen um $g$ und $g'$ drehen.

Dieser orthogonale Kegel ist concyclisch mit dem Kegel des Pappus: denn seine cyclischen Ebenen stehen normal zu $g$ und $g'$, fallen also zusammen mit $\varepsilon'$ und $\varepsilon$.

Die beiden projectivischen Ebenenbüschel I. O., welche die conjugirten Normalebenen $\tau$ und $\tau'$ um $g$ und $g'$ als Axen beschreiben, werden von der Symmetrieebene $\overline{ac}$ in zwei projectivischen, concentrischen Strahlenbüscheln I. O. geschnitten. Je zwei normale Ebenen, welche durch zwei entsprechende Strahlen dieser Büschel gehen, sind bezüglich des Kegels des Pappus conjugirt[1]). Folglich ist jeder von den beiden Strahlen, welche die projectivischen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben, dadurch ausgezeichnet, dass je zwei durch ihn gehende normale Ebenen hinsichtlich des Kegels conjugirt sind. Diese beiden ausgezeichneten Strahlen

[1]) cf. Reye, Geom. d. Lage, B. I. S. 152.

sind also die Focalaxen des Kegels des Pappus, und wir erhalten sie als die Scheitelstrahlen des orthogonalen Kegels in der Symmetrieebene $\overline{ac}$, so dass wir sagen können:

Die Focalaxen eines Kegels des Pappus liegen auf dem mit ihm concyclischen orthogonalen Kegel.

---

Ein Kegel des Pappus ist durch seine cyclischen Ebenen eindeutig bestimmt; denn mit ihnen sind zugleich ihre Normalstrahlen gegeben, welche sich als Polstrahlen der cyclischen Ebenen erwiesen haben. Verändern wir den Winkel der cyclischen Ebenen, indem wir diese um ihre Schnittlinie, die Hauptaxe $c$, drehen, jedoch so, dass sie stets symmetrisch zu den Symmetrieebenen $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ bleiben, so wird dadurch weder der Winkel noch die Lage der Kegelstrahlen $s$ und $s'$ in der Symmetrieebene $\overline{ab}$ geändert. Dagegen ändert sich die Kegelöffnung in der Symmetrieebene $\overline{ac}$ und der Winkel der in dieser Ebene gelegenen Focalaxen. Es wird also zwischen diesen Winkeln und dem der cyclischen Ebenen eine directe Beziehung bestehen; wir wollen dieselbe im Folgenden aufstellen.

Bezeichnet man bei einer beliebigen Kegelfläche II. O. denjenigen Flächenwinkel der cyclischen Ebenen, innerhalb dessen die Kegelfläche liegt, mit $2E$, die Kegelöffnung in der Symmetrieebene $\overline{ab}$ mit $2\vartheta$, die in der Symmetrieebene $\overline{ac}$ mit $2\varphi$ und schliesslich denjenigen Winkel der beiden Focalaxen, welcher die Hauptaxe $a$ enthält, mit $2\varepsilon$, so sind diese Grössen durch folgende Gleichungen verbunden:[1])

$$\sin E = \frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi},$$

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta}.$$

Diese gehen beim Kegel des Pappus wegen $\vartheta = 45^0$, also $\sin \vartheta = \cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ in die einfacheren über

---

[1]) cf. Schröter, Theorie d. Oberfl. II. O. etc. p. 62 u. p. 64.

$$1)\quad \sin E = \frac{1}{V_2 \sin \varphi},$$

$$2)\quad \cos \varepsilon = V_2 \cos \varphi.$$

Hieraus folgt:

$$2 = \cos {}^2\varepsilon + \frac{1}{\sin {}^2E},$$

$$1 = \cos {}^2\varepsilon + \operatorname{ctg} {}^2E,$$

$$\text{also } \sin {}^2\varepsilon = \operatorname{ctg} {}^2E.$$

Die Winkel $\varepsilon$ und $E$ können nicht grösser als $90^0$ werden, daher sind $\sin \varepsilon$ und $\operatorname{ctg} E$ positive Grössen und folglich wird

$$\sin \varepsilon = \operatorname{ctg} E.$$

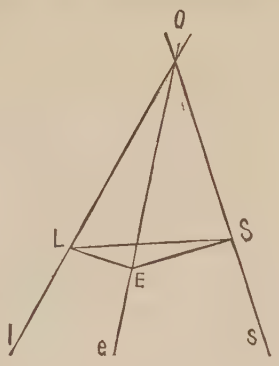
Dies ist die einfache Beziehung, welche zwischen dem halben Winkel $E$ der cyclischen Ebenen und dem halben Winkel $\varepsilon$ der Focalaxen eines Kegels des Pappus besteht; $\operatorname{ctg} E$ kann in dieser Gleichung nur Werthe annehmen, die zwischen *0* und *1* liegen, $E$ muss also ein zwischen 45 und $90^0$ gelegener Winkel sein. Hierdurch bestätigt es sich wieder, was wir schon früher gezeigt haben, dass der Flächenwinkel $2E$ der cyclischen Ebenen ein stumpfer ist.

Denken wir uns nun $E$ zwischen den angegebenen Grenzen veränderlich, so wird für einen bestimmten Winkel die Cotangente von $E$ den Werth $V\frac{1}{2}$ annehmen. Alsdann ist $\sin \varepsilon = V\frac{1}{2}$, also $\varepsilon = 45^0$, oder der ganze Winkel $2\varepsilon$ beträgt einen Rechten. Aus der Gleichung 2) erhalten wir ferner in diesem Falle $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ d. h. $\varphi = 60^0$, mithin $2\varphi = 120^0$. Wir sehen also, für denjenigen Kegel des Pappus, dessen Kegelöffnung in der Symmetrieebene $\overline{a\,c}$ $120^0$ beträgt, stehen die Focalaxen zu einander normal.

Wir wollen diesen metrischen Relationen noch einige andere beachtenswerthe folgen lassen.

Werden allgemein zwei Kegelstrahlen, deren Ebene den Polstrahl einer cyclischen Ebene enthält, mit irgend einem dritten Kegelstrahl durch zwei Ebenen verbunden, so schneiden dieselben die cyclische Ebene in zwei normalen Strahlen. Werden daher beim Kegel des Pappus die rechtwinkeligen

Scheidelstrahlen $s$ und $s'$ in der Symmetrieebene $\overline{a\,b} = \overline{g\,g'}$, mit einem beliebigen Kegelstrahle $m$ durch 2 Ebenen $\mu$ und $\mu'$ verbunden, so schneiden diese eine jede der cyclischen Ebenen in zwei normalen Strahlen. $l$ un $l'$ seien die Schnittstrahlen der cyclischen Ebene $\varepsilon$ mit $\mu$ und $\mu'$, und mit $e$ werde der Schnittstrahl von $\varepsilon$ mit der Symmetrieebene $\overline{a\,b} = \alpha$ bezeichnet. Fällen wir dann aus einem beliebigen Punkte $L$ der Geraden $l$ die Normale $LE$ auf $e$ und von $E$ eine Normale $ES$ auf $s$, so ist die Ebene $\overline{LES}$ normal zu dem Strahle $s$, folglich ist der Winkel, welchen die beiden Ebenen $\mu$ und $\alpha$ mit einander bilden, gleich dem Winkel der Strahlen $SL$ und $SE$. Also ist




$$\operatorname{tg}(\mu\,\alpha) = \frac{L\,E}{E\,S} = \frac{E\,O\,\operatorname{tg}(e\,l)}{E\,O\sin(s\,e)} = \frac{\operatorname{tg}(e\,l)}{\sin(s\,e)}$$

Stellen wir mit dem aus den Strahlen $s'$, $e$, $l'$ gebildeten Dreikant dieselben Betrachtungen an, so erhalten wir

$$\operatorname{tg}(\mu'\,\alpha) = \frac{\operatorname{tg}(e\,l')}{\sin(s'\,e)}.$$

Nun ist $(e\,l') = 90^0 + (e\,l)$,

$(s'\,e) = 90^0 + (s\,e)$, also

$\operatorname{tg}(e\,l') = -\operatorname{ctg}(e\,l)$,

$\sin(s'\,e) = \cos(s\,e)$.

Durch Multiplication erhalten wir daher

$$\operatorname{tg}(\mu\,\alpha)\,.\,\operatorname{tg}(\mu'\,\alpha) = -\frac{1}{\sin(s\,e)\cos(s\,e)},$$

$$= -\frac{2}{\sin(g\,e)},$$

$$= -\frac{2}{\cos(g\,g')}$$

also auch

$$\operatorname{tg}(\mu\,\alpha)\,.\,\operatorname{tg}(\mu'\,\alpha) = \frac{2}{\cos 2E}.$$

Das Product tg $(\mu\, a)$ . tg $(\mu'\, a)$ hat für jede Kegelfläche II. O. einen constanten Werth; beim Kegel des Pappus drückt es sich einfach durch die Winkelöffnung der cyclischen Ebenen aus. Weil diese aber einen Rechten übersteigt, so hat jenes Product einen negativen Werth.

Eine einfache Beziehung besteht auch zwischen den Winkeln, welche ein beliebiger Kegelstrahl $m$ mit den cyclischen Ebenen $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ bildet. Legen wir normal zu $g$ eine Ebene, so schneidet dieselbe den Kegel in einem Kreis, auf welchem auch der Schnittpunkt $M$ des Strahles $m$ liegt. Bezeichnen wir dann noch mit $G$ und $G'$ die Spuren von $g$ und $g'$ in dieser Ebene und erinnern wir uns, dass der Mittelpunkt $O$ des Kegels mit dem Kreise auf einer Kugel liegt, welche $G'$ zum Mittelpunkt hat, so erkennen wir, dass

$$\cos(m\, g) = \frac{O\,G}{O\,M},$$

$$\cos(m\, g') = \frac{O\,M}{2\,O\,G'}, \text{ also}$$

$$\cos(m\, g) \,.\, \cos(m\, g') = {}^1\!/_2\, \frac{O\,G}{O\,G'} = {}^1\!/_2 \cos(g\, g')$$

$$= \text{const; also auch}$$

$$\sin(m\, \varepsilon') \,.\, \sin(m\, \varepsilon) = \text{const.}$$

Wir haben also folgendes Resultat:

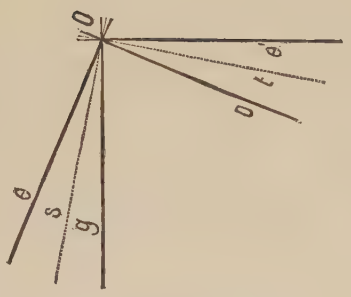
> Die Sinus der Winkel, welche ein beliebiger Kegelstrahl mit den beiden cyclischen Ebenen eines Kegels des Pappus bildet, haben ein constantes Product.

---

Wir haben oben ein enges Verhältniss kennen gelernt, welches zwischen dem Kegel des Pappus und dem ihm concyclischen orthogonalen Kegel besteht. Dies lässt sich noch weiter verfolgen in Bezug auf die Entstehungsweisen beider Kegel.

Dreht sich um $g$ eine Ebene $\tau$, welche $\varepsilon$ in dem Strahle $e$ schneidet, und ziehen wir in $\tau$ den zu $e$ normalen Strahl $o$, so bewegt sich dieser auf einem orthogonalen Kegel, welcher $\varepsilon$ als eine cyclische Ebene und $g$ als Normalstrahl der an-

dern hat. Denn die Ebene $\overline{o\,g'}$ hat $e$ zu ihrer Normale, steht also senkrecht zu $\tau$. Der Strahl $o$ erscheint daher auch als Schnittlinie zweier um $g$ und $g'$ sich drehenden normalen Ebenen, folglich beschreibt er einen orthogonalen Kegel, dessen cyclische Ebenen normal sind zu $g$ und $g'$, also zusammenfallen mit $\varepsilon'$ und $\varepsilon$.




Bezeichnen wir nun die Halbirungslinien des Winkels $(e\,g)$ und seines Nebenwinkels mit $s$ und $t$ und nennen $e'$ den Schnittstrahl der Ebene $\tau$ mit $\varepsilon'$, so wird auch der Winkel $(e'\,o)$ und sein Nebenwinkel, weil $e'$ normal zu $g$ und $o$ normal zu $e$, von den beiden Kegelstrahlen $t$ und $s$ halbirt. Es gilt daher folgender Satz:

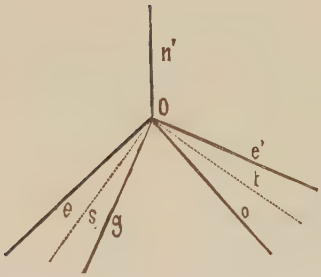
> Dreht sich eine Ebene $\tau$ um den Normalstrahl $g$ einer cyclischen Ebene $\varepsilon'$ eines Kegels des Pappus, so beschreibt der zu dem Schnittstrahl beider Ebenen conjugirte Strahl einen orthogonalen Kegel, welcher mit dem gegebenen Kegel des Pappus concyclisch ist.

Umgekehrt gilt auch Folgendes:

> Wenn ein orthogonaler Kegel gegeben ist, und man dreht um den Normalstrahl $g$ seiner cyclischen Ebene $\varepsilon'$ und eine Ebene $\tau$, welche den Kegel zum andern Male in $o$ und die cyclische Ebene in $e'$ schneidet, so bewegt sich die Halbirungslinie des Winkels $(o\,e')$ auf einem Kegel des Pappus, welcher mit dem orthogonalen concyclisch ist.

---

Der Normalstrahl der Ebene $\tau$ liegt in $\varepsilon'$ normal zu $c'$. Wir wollen ihn $n'$ und die Ebene, welche $n'$ mit $g'$ verbindet, $\tau'$ nennen. Dann steht diese normal zu $\tau$ und schneidet sie in $o$. Der Winkel, welchen $\tau'$ mit $\varepsilon'$ bildet, ist gleich dem Winkel $(o\,e')$, welcher von dem Kegelstrahl $t$ halbirt wird.




Nennen wir nun $\tau'$ die Gegenebene der cyclischen Ebene $\varepsilon'$ in Bezug auf den Kegelstrahl $t$, so erkennen wir die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Die Gegenebenen einer cyclischen Ebene eines Kegels des Pappus bezüglich aller Kegelstrahlen bilden einen Ebenenbüschel I. O., dessen Axe der Polstrahl dieser cyclischen Ebene ist.

Wir heben diesen Satz deswegen hervor, weil bei der allgemeinen Kegelfläche II. O. die Gegenebenen einer cyclischen Ebene bezüglich aller Kegelstrahlen einen Rotationskegel umhüllen.[1])

Die Ebene, welche $n'$ mit $s$ verbindet, hat $t$ zu ihrem Normalstrahl und andererseits steht die Ebene $\overline{n' t}$ normal zu $s$. Folglich sind diese beiden normalen Ebenen Berührungsebenen des supplementären Kegels. Wir können also sagen:

Verbindet man bei gegebenem Kegel des Pappus einen beliebigen Strahl einer cyclischen Ebene mit den beiden zu ihm normalen Kegelstrahlen durch zwei Ebenen, so berühren diese Ebenen den supplementären Kegel und stehen zu einander normal.

Für die allgemeine Kegelfläche II. O. sind die so erhaltenen Ebenen zwar auch Berührungsebenen einer Kegelfläche II. O., diese ist aber nicht supplementär zu der ersteren.[2])

---

[1]) cf. Reye, Geom. d. Lage, II. Aufl. B. I. pag. 155.

[2]) Chasles, Mém. d. géom. pure etc. pag. 26.

# Der supplementäre Kegel.

## (Kegel des Hachette.)

Uebertragen wir die Eigenschaften des Kegels des Pappus nach dem für rechtwinkelige Strahlenbündel gültigen Reciprocitätsgesetze, so erhalten wir die des supplementären Kegels. Wir würden es daher unterlassen können, auf diesen Kegel näher einzugehen, wenn er nicht einige auffallende Analogien mit der Parabel darböte, welche einer besonderen Darlegung werth erscheinen.

Wir wollen dabei ausgehen vom Kegel des Hachette,[1]) dem geometrischen Orte aller Punkte, die von einer festen Ebene und einer festen Geraden gleichen Abstand haben, sodann ihn soweit behandeln, bis wir seinen parabolischen Character vollständig erkennen und schliesslich constatiren, dass er supplementär ist zum Kegel des Pappus.

Um nun zunächst den Nachweis zu liefern, dass genannter Ort in der That eine Kegelfläche II. O. ist, bedienen wir uns der äusserst einfachen Methode von Hachette. Die feste Ebene sei $\varepsilon$, die feste Gerade sei $g$ und schneide $\varepsilon$ im Punkte $O$; eine beliebige zu $\varepsilon$ parallele Ebene werde mit $\gamma$ bezeichnet. Construiren wir alsdann einen geraden Kreiscylinder, welcher $g$ als Axe und den Abstand beider Ebenen zum Radius hat, so schneidet derselbe die Ebene $\gamma$ in einer Ellipse, welche offenbar zu dem gesuchten Orte gehört. Folglich bildet jeder Strahl der Kegelfläche II. O., welche diese Ellipse aus $O$ projicirt, mit $\varepsilon$ denselben Winkel wie mit $g$, d. h. jeder Punkt der Kegelfläche hat gleiche Ent-

[1]) cf. pag. 8.

fernung von $\varepsilon$ und $g$. Dieser Kegel repräsentirt aber den Ort auch vollständig; denn ist $X$ ein beliebiger Punkt des Ortes, so muss die Gerade, welche $O$ mit $X$ verbindet, durch einen Punkt der Ellipse gehen, also ganz auf dem Kegel liegen.[1])

Die Ebene $\gamma$ schneidet die Gerade $g$ in dem Mittelpunkte der Ellipse, dessen Polare in Bezug auf dieselbe unendlich fern liegt; folglich ist $\varepsilon$ Polarebene der Geraden $g$ in Bezug auf die Kegelfläche. Errichten wir nun auf $\varepsilon$ im Punkte $O$ die Normale $g'$ und nennen $\alpha$ den Winkel, welchen ein beliebiger Kegelstrahl mit $g$, also auch mit $\varepsilon$ bildet, so ist $R - \alpha$ der Winkel dieses Strahles mit der Geraden $g'$. Die Summe der Winkel, welche ein beliebiger Kegelstrahl mit $g$ und $g'$ bildet, beträgt daher einen Rechten, sie ist constant; folglich sind die Geraden $g$ und $g'$ die Focalaxen des Kegels. Wir können daher folgendes Resultat aussprechen:

> Der Ort aller Punkte, welche von einer festen Ebene $\varepsilon$ und einer festen Gerade $g$ gleichen Abstand haben, ist eine Kegelfläche II. O., von welcher $g$ eine Focalaxe und $\varepsilon$ deren Polarebene ist.

Weil die zweite Focalaxe $g'$ dieses Kegels des Hachette normal steht zu der Polarebene $\varepsilon$ der ersteren, so folgt aus den Bedingungen der Symmetrie, dass auch diese normal ist zu der Polarebene $\varepsilon'$ der Focalaxe $g'$. Es gilt daher folgender Satz:

> Von den beiden Focalaxen eines Kegels des Hachette steht jede normal zu der Polarebene der andern.

Hieraus folgt, dass ein beliebiger Kegelstrahl nicht nur mit $\varepsilon$ und $g$ gleiche Winkel bildet, sondern auch mit $g'$ und $\varepsilon'$. Daher erkennt man zugleich, dass durch die Ebene $\varepsilon$ und

---

[1]) Mit dieser Constructionsmethode des Kegels kann in entsprechend modificirter Form auch einfach und klar gezeigt werden, dass der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von einer festen Ebene und einer festen Geraden in einem constanten Verhältnisse stehen, eine Kegelfläche II. O. ist.

die Gerade $g$ derselbe Kegel des Hachette bestimmt ist, wie durch die Normalebene $\varepsilon'$ von $g$ und den Normalstrahl $g'$ von $\varepsilon$.

Die im ersten Satze enthaltene Erzeugungsart des Kegels erinnert sofort an die bekannte der Parabel aus Brennpunkt und Directrix; eine weitere Analogie erkennt man in dem folgenden beachtenswerthen Satze:

> Beim Kegel des Hachette stehen je zwei Berührungsebenen, die sich auf der Polarebene einer Focalaxe schneiden, zu einander normal.

Bezeichnen wir nämlich mit $\sigma$ die Berührungsebene an einen beliebigen Kegelstrahl $s$ und nennen $e$ ihren Schnittstrahl mit der Polarebene $\varepsilon$ der Focalaxe $g$, dann ist $e$ der Polstrahl der Ebene $\overline{sg}$, folglich ist diese conjugirt und daher auch normal zu der Ebene $\overline{ge}$. Legen wir ferner durch den Kegelstrahl $s$ noch die Normalebene zu $\varepsilon$ und nennen $k$ ihren Schnittstrahl mit dieser Ebene, so stimmen die beiden Dreikante $seg$ und $sek$ überein in zwei Kantenwinkeln, nämlich $(se) = (se)$, $(sg) = (sk)$, und einem Flächenwinkel, nämlich demjenigen, welcher in jedem Dreikant der Ebene $\sigma$ gegenüberliegt und einen Rechten beträgt. Die beiden Dreikante sind daher congruent, und es schliesst folglich $\sigma$ mit $\varepsilon$ denselben Winkel ein, wie mit $\overline{eg}$, oder mit anderen Worten, die Berührungsebene $\sigma$ halbirt den von den Ebenen $\varepsilon$ und $\overline{eg}$ gebildeten Flächenwinkel. Die zweite durch $e$ gehende Berührungsebene $\sigma'$ halbirt den Nebenwinkel, steht also normal zu $\sigma$. Damit ist der Satz bewiesen.

In dieser Eigenschaft des Kegels tritt am klarsten seine duale Abhängigkeit vom Kegel des Pappus hervor; daher verweisen wir bezüglich seiner weiteren Eigenschaften auf die entsprechenden bei letzterem Kegel. Bemerkt sei nur noch, dass der Kegel des Hachette zu demjenigen Kegel des Pappus supplementär ist, welcher $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ zu cyclischen Ebenen und $g$ und $g'$ zu deren Polstrahlen hat.

# Lebenslauf.

Am 15. Juli 1859 wurde ich, Carl Theodor Meyer, evangelischer Confession, zu Unnau in Nassau geboren als Sohn des Landwirths Friedrich Wilhelm Meyer und der 1878 verstorbenen Wilhelmine geb. Steup. Meinen ersten Unterricht genoss ich in der Elementarschule zu Unnau, welche ich von meinem 6. bis 14. Lebensjahre besuchte. Durch Privatunterricht vorbereitet, trat ich Ostern 1877 in die Obersecunda der Realschule I. O. zu Mülheim a/Rhein; drei Jahre später verliess ich diese Anstalt mit dem Zeugniss der Reife. Die beiden ersten Semester meiner Studienzeit (Sommer 1880 und Winter 1880/81) verlebte ich in Berlin, hierauf besuchte ich je ein Semester lang die Universitäten Strassburg, Giessen und Bonn und kehrte Herbst 1882 nach Strassbnrg zurück, woselbst ich bis zum Schluss des Wintersemesters 1883/84 studirt habe. Während dieser acht Semester habe ich mich vorzugsweise mit Mathematik und Physik beschäftigt. Vorlesungen habe ich gehört bei den Herren Professoren:

Baltzer, de Bary, Bischof, du Bois-Reymond, Bratuscheck, Christoffel, Clausius, Helmholtz, Kohlrausch, Kortum, Kummer, Kundt, Laas, Lipschitz, Netto, Pasch, Paulsen, Reye, Röntgen, Roth, Schaarschmidt, Schering, Schiller, O. Schmidt, Wangerin.

Allen diesen meinen Lehrern fühle ich mich zu Dank verpflichtet, besonders aber schulde ich Herrn Professor Reye für die persönliche Theilnahme, mit der er meine Studien in anregender Weise geleitet hat, aufrichtigen und herzlichen Dank.